Στοιχεία Γενικής Τοπολογίας

Εισαγωγή

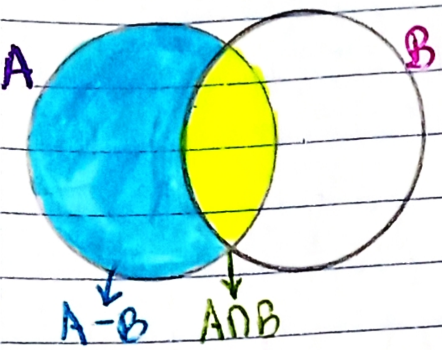
Σύνολα

- $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$ ή $\Omega \setminus \{A\cup B\}$
- $A \subseteq B := \forall x\in A \Rightarrow x \in B$
- $A = B := A\subseteq B$ κ' $B \subseteq A$

Παράδειγμα

$(A\cap B)\cup(A-B) = A$

$$(\Rightarrow)\ x\in A \begin{cases} x\notin B \Rightarrow x\in A-B \\ x\in B \Rightarrow x\in A\cap B \end{cases} \Rightarrow x\in (A-B)\cup(A\cap B)$$



Άρα $A \subseteq (A-B)\cup(A\cap B)$

($\Rightarrow$) Ας είναι $x\in A$.
Διακρίνω δύο περιπτώσεις (a) $x\in B$ (b) $x\notin B$

(a) $x\in B \Rightarrow x\in A\cap B \Rightarrow x\in (A-B)\cup(A\cap B)$
(b) $x\notin B$ τότε $x\in A-B \Rightarrow x\in (A-B)\cup(A\cap B)$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση έχουμε:
$x\in A \Rightarrow x\in (A-B)\cup(A\cap B)$ (I)

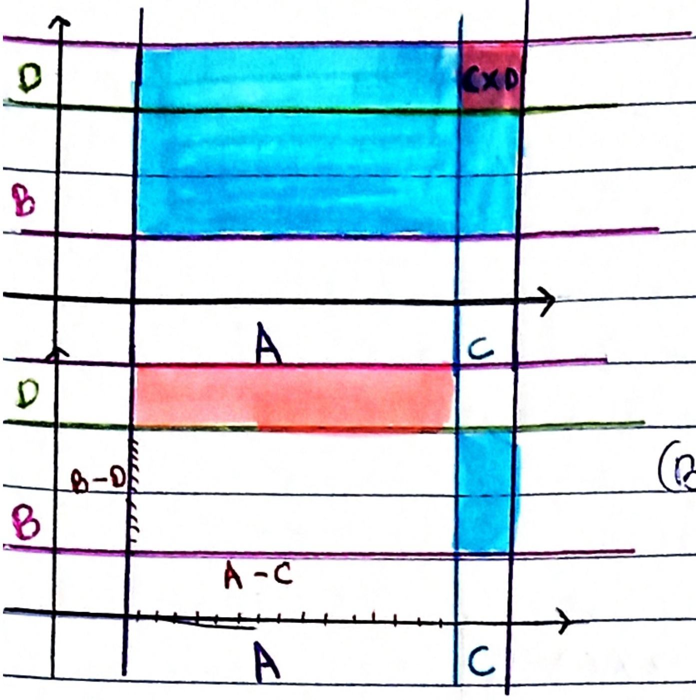
($\Leftarrow$) $x\in(A-B)\cup(A\cap B) \Rightarrow x\in A-B \vee x\in A\cap B \Rightarrow (x\in A \wedge x\notin B)\vee(x\in A \wedge x\in B) \Rightarrow$
$x\in A$. Άρα $(A-B)\cup(A\cap B)\subseteq A$ (II)

Επομένως, από τα (I), (II) $(A-B)\cup(A\cap B) = A$ //

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$(A\times B)-(C\times D)=(A-C)\times(B-D)$ Είναι σωστό ή λάθος;

Αν είναι λάθος διορθώστε το με $\supseteq$ ή $\subseteq$



$A\times B$

$C\times D$

$(B-D)\times(A-C)$ Άρα ΛΑΘΟΣ

$(x,y)\in(A-C)\times(B-D)$

$x\in(A-C)\wedge y\in(B-D)$

$(x\in A\wedge x\notin C)\wedge(y\in B\wedge y\notin D)$

$(x,y)\in(A\times B)\wedge(x,y)\notin(C\times D)$

$(x,y)\in(A\times B)-(C\times D)$

Επομένως, η σωστή σχέση είναι $(A\times B)-(C\times D)\supseteq(A-C)\times(B-C)$ //

- $A,B\neq\emptyset \rightsquigarrow A\times B=\{(x,y): x\in A, y\in B\}$
- $B\times A=\{(x,y): x\in B, y\in A\}$

$\Big\}$ Άρα $A\times B\neq B\times A$

- $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
- $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
- $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C$

- $A-(B-C) \neq (A-B)-C$

- $A-B = A \cap B^c$ (μετατρέπει την διαφορά σε τομή, όπου η τομή είναι προσεταιριστική!

Νομοι De' Morgan

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

- $A-(B-C) = A \cap (B \cap C^c)^c = A \cap [B^c \cup (C^c)^c] = A \cap (B^c \cup C)$

ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

- $A_i \subseteq \Omega \,/\, i \in I$

→ Σύνολο δεικτών της οικογένειας

- $\{A_i : i \in I\}$

→ Αν $I = \{1, 2, 3\} \rightarrow \{A_1, A_2, A_3\}$

Αν $I = \mathbb{N}$ $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$

→ $(A_r)_{r \in \mathbb{Q}}$ ή $\mathbb{R}$ Δεν μπορώ να το γράψω στην μορφή $\{A_i, i \in I\}$ καθώς, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ δεν έχουν διάταξη

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists i \in I \text{ με } x \in A_i\}$

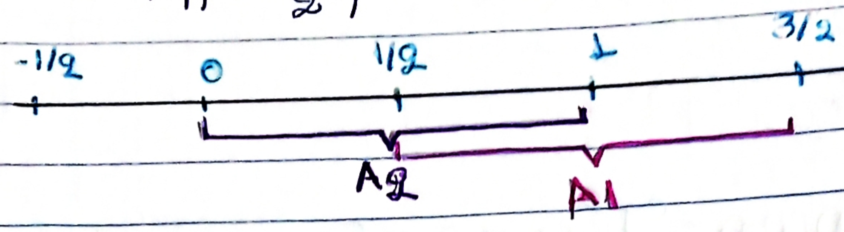
- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \ \forall i \in I\}$

Παράδειγμα

$$A_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)$$

Είναι η ριπάδα $B = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right)$

Σχηματικά $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$



Άρα $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Ιδιότητες

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$$

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$$

Νόμοι De Morgan

- $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = B - \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (B - A_i) = \bigcap_{i\in I} A_i^c$

- $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = B - \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (B - A_i) = \bigcup_{i\in I} A_i^c$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$A_r = \{r-\frac{1}{2}, r+\frac{1}{2}\}$, $r\in\mathbb{Q}$

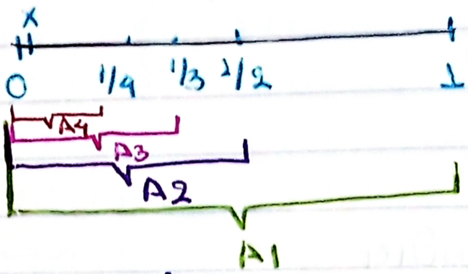
$A_r = (r-\frac{1}{2}, r+\frac{1}{2})$ $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} A_r = \mathbb{R}$

Και οι $\mathbb{Q}$ και οι $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ είναι μέσα σε αυτό το διάστημα. Καθώς αξία πάρω $r\in\mathbb{Q}$ παίρνω όλους τους ρητούς, και αν πάρω $r\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, οι $\mathbb{Q}$ είναι τόσο πυκνοί, όπου οι $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ είναι πολύ κοντά σε αυτούς, άρα παίρνω όλο το $\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$A_n = (0, \frac{1}{n})$, $n\in\mathbb{N}$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$



Έστω $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ και πρέπει $x>0$

Εάν βρω ένα σύνολο, όπου $x\notin\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ τελείωσα.

Πρέπει $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\to 0$. Άρα σε κάποια φάση, θα προσπεράσει το x.

Άρα $\lim\frac{1}{n}=0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0$ μία $\varepsilon=\frac{x}{2}>0$ $(\exists n_0\in\mathbb{N})$:

$\left|0-\frac{1}{n}\right|<\frac{x}{2}$, $\forall n\geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n_0}<\frac{2}{n}<x$, $x\notin\left(0,\frac{1}{n_0}\right)$

Επομένως, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n=\emptyset$ //

Έστω $I = \mathbb{N}^*$

$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots$ → Είναι διακεκριμένα σύνολα που μπορεί να εμπεριέχουν το οτιδήποτε

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots$ → ακολουθίες που ανήκουν στο αντίστοιχο σύνολο A_n

↱ αναγκαστικά

$\boxed{f(n) = x_n \in A_n}$ $\boxed{f: \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} A_i}$

$A_1 \times A_2 = \{(x, y) : x \in A_1, y \in A_2\}$

$f: \{1, 2\} \to A_1 \cup A_2 : \underbrace{f(1) \in A_1 \text{ κ' } f(2) \in A_2}$

αναγκαστική προϋπόθεση

Παράδειγμα

$A_1 = \{$ ✿ $, \Delta\}$ $A_2 = \{+, 3, \sqrt{7}\}$

↱ 1ος όρος ακολουθία

$A_1 \times A_2 = \{($ ✿ $, +), ($ ✿ $, 3), ($ ✿ $, \sqrt{7}), (\Delta, +), (\Delta, 3), (\Delta, \sqrt{7})\}$

$\in A_1 \quad \in A_2 \quad \in A_1 \quad \in A_2 \quad \in A_1 \quad \in A_2 \quad \in A_1 \quad \in A_2$

↓ 1ος όρος ακολουθίας ↳ 2ος όρος ακολουθίας

$A_1 \cup A_2 := \{$ ✿ $, \Delta, +, 3, \sqrt{7}\}$

$f: \{1, 2\} \to A_1 \cup A_2 : f(1) \in A_1 \text{ κ' } f(2) \in A_2$

Δηλαδή ο 1ος όρος ακολουθίας είναι πάντα από το A_1 και ο 2ος όρος ακολουθίας είναι πάντα από το A_2

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ

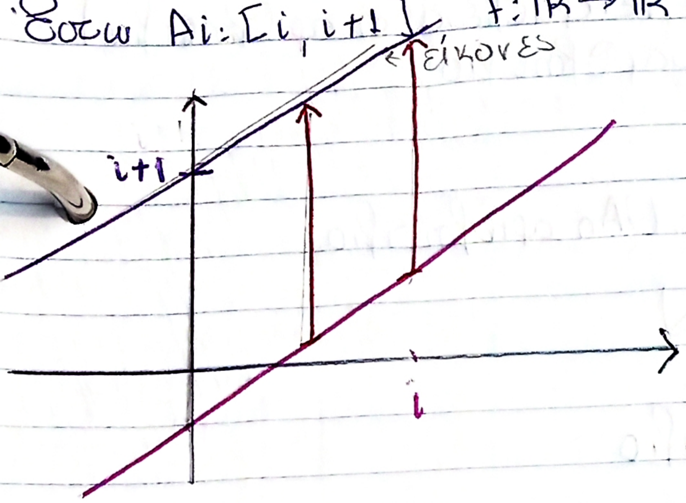
$A_1, A_2, A_3, \ldots$

$\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots = \{ f : \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i ,\ f(i) \in A_i\ \forall i \in I \}$

Συναρτήσεις γραμμένες σε καρτεσιανό γινόμενο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $A_i : [i, i+1]$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(i) \in A_i$



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \leq f(x) \leq x+1$

$\boxed{\prod_{i \in I} A_i, \text{ εάν ένα από τα } A_i = \emptyset, \text{ τότε } \prod_{i \in I} A_i = \emptyset.}$

$(A_1 \times A_2)$: 6 στοιχεία.
↓ ↳ 3 στοιχεία
2 στοιχεία

$(A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5)$ Επομένως, έχει 120 στοιχεία.

2 στοιχεία 3 5 1 4

⑤ → $|I|$ · πληθάριθμος του I, δηλαδή το πλήθος των στοιχείων του I.

$A \times A \times A \times A \times A = 3$ στοιχεία

3 3 3 3 3 $|A|$

Πρέπει να έχουν τα ίδια στοιχεία, τα A για να βγάζει νόημα το $A^I = \prod_{i \in I} A_i$ με $A_i = A$

$A^B = \{ f: B \to A \}$ (όλες οι συναρτήσεις από το B στο A)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$[0,1]^{\mathbb{R}} = \{ f: \mathbb{R} \to [0,1] \}$ η $0 \leq f(x) \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

ΠΡΟΤΑΣΗ
Έστω A_1, A_2 το πολύ αριθμήσιμα (ή πεπερασμένα ή αριθμήσιμα)
τότε $A_1 \cup A_2$ κ' $A_1 \times A_2$ είναι το πολύ αριθμήσιμο.

ΠΡΟΤΑΣΗ
$A_1, \dots, A_n, n \in \mathbb{N}$ Αριθμήσιμο τότε $A_1 \cup \dots \cup A_n$ αριθμήσιμο.

- $\mathbb{Q}$ αριθμήσιμο, άρα $\mathbb{Q} \simeq \mathbb{N}$, $f: \mathbb{Q} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \mathbb{N}$.
- $\mathbb{R}$ μη αριθμήσιμα, αλλά υπεραριθμήσιμο

notes
$\mathbb{N}$ το πιο μικρό αριθμήσιμο σύνολο

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Έστω ότι $\mathbb{R}$ αριθμήσιμο. Έστω ότι έχω "βάλει" στην σειρά τους αριθμούς από το 0 έως το 1.

$[0,1]$ $0, a_{11}, a_{12}, \dots$ $0, a_{21}, a_{22}, \dots$ $\vdots$ $a_{k1}, a_{k2}, \dots$	Αλλάζω όλα τα $a_{11}, a_{kk} \dots$ άρα δεν είναι ίδιο με την διάταξη που έφτιαξα προηγουμένως. Άρα το $\mathbb{R}$ δεν είναι αριθμήσιμο.

ΠΡΟΤΑΣΗ

$|A| < |P(A)|$ δυναμοσύνολο

π.χ. $|A| = n$ $|P(A)| = 2^n$
$|A| = 3$ $|P(A)| = 8$.

$|\mathbb{R}| < |P(\mathbb{R})| < |P(P(P(\mathbb{R})))|$

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ $|P(\mathbb{N})| = 2^{\mathbb{N}}$

έχει το νόημα λογαρίθμου σε πραγμ. αριθμού ↵